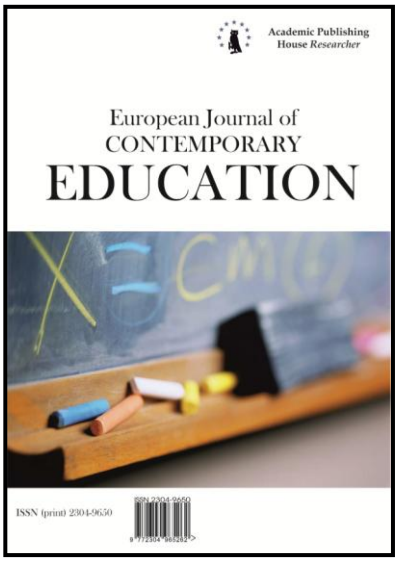
Published in the Russian Federation
European Journal of Contemporary Education
ISSN 2219-8229
E-ISSN 2224-0136
Vol. 11, Is. 1, pp. 82-90, 2015
DOI: 10.13187/ejced.2015.11.82
www.ejournal1.com



UDC 378.14: 371.214.46:[004.78:51]

Organization Of Experimental Computing in GeoGebra 5.0 in Solving Problems of Probability Theory

[1] Elena Semenikhina
[2] Marina Drushlyak

[1] Sumy State Pedagogical Makarenko University, Ukraine
PhD (Pedagogical Sciences), Associate Professor
E-mail: e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua
[2] Sumy State Pedagogical Makarenko University, Ukraine
PhD (Physical and Mathematical Sciences), Senior Lecturer
E-mail: marydru@mail.ru

Abstract

The article analyzes the use of various mathematics software in the study of stochastic. The idea of dynamic visualization of the results of random experiments on the example of the classical problem of the meeting, which can be solved in two ways: using statistical definition of probability, which is based on random experiments, and traditionally using the geometric definition of probability. Some tasks, on the base of which the idea of visualization of the results of random experiments can be implemented, are offered with instructions.

Keywords: GeoGebra 5.0; visualization; random variables; visualization of the results random experiments; statistic and geometric probability.

Введение

Развитие информационного общества повлияло на сферу образования. Это влияние сказалось не только в активном оснащении учебных заведений компьютерной техникой, но и в понимании необходимости переосмыслить устоявшиеся подходы к обучению. Особенно это касается математики, классический курс которой есть не только системно и фундаментально построенным, но и достаточно гибким в отношении внедрения современной информационной поддержки. Такая поддержка заключается, в частности, в упрощении и ускорении расчетов, визуализации математических объектов, возможности их динамически изменять и т.д.

Сейчас можно говорить о том, что существует большое количество математических компьютерных программ (системы компьютерной математики типа *Maple*, *Mathematica*, *Maxima*, *Sage* и др., программы динамической математики типа *Geometer's Sketchpad*, *Cabri, Geonext* и т.д.), которые позволяют быстро решать задачи различных разделов математики, начиная от простых геометрических построений до сложных аналитических расчетов. Разнообразие таких компьютерных программ служит вспомогательным инструментом специалистам в различных областях естественно-математических наук, в частности, и тем, кто учит математику.

Сегодня учителя математики в своем арсенале имеют достаточное количество мощных информационных средств, но изучение вопроса относительно их методического сопровождения и особенностей применения является до сих пор актуальным ввиду постоянного обновления программного обеспечения, совершенствования компьютерного инструментария и мощностей информационных систем. Именно поэтому хотим отметить вероятностную линию школьного курса математики, которая ранее поддерживалась только отечественным продуктом *Gran1*, а сегодня и другими программами динамической математики – *Математический конструктор* и *GeoGebra*. И если в украинском *Gran1* предусмотрены быстрая обработка статистических данных и анализ распределений, то для последних упомянутых нами оболочек возможной является еще и организация эксперимента со случайными величинами, что с позиций методики обучения математике является неоспоримым преимуществом при формировании представлений о процессах окружающего мира, их математическом обосновании и о межпредметных и надпредметных связях (способность не только демонстрировать умение, но и объяснить, почему именно так нужно делать).

Анализ актуальных исследований. Анализ научно-методической литературы по использованию информационных технологий при изучении математической статистики позволяет утверждать, что чаще всего рассматриваются возможности применения мощных специализированных сред (например, *Statgraphics*, *Statistica*, *SPSS*, *Systat*, *Stadia*, *Maple*, *MathCad* [1] и т.д.), электронных таблиц [2; 3], виртуальных оболочек программирования с использованием генератора случайных чисел (например, *Pascal* [4-6], *DevC++* и т.д.). Также можно утверждать, что в школьной практике при изучении теории вероятности используются табличный процессор *Excel,* и это, как правило, происходит на интегрированных уроках математики и информатики. С 2013 года учебными программами по информатике для старшей школы предлагается изучение пакетов *Gran*, разработчиками которых предусмотрена возможность обработки распределений случайных величин и определения отдельных характеристик выборок. Подтверждением тому – большое количество публикаций, посвященных применению программы *Gran1* к решению задач теории вероятностей и статистики (например, [7; 8]).

Вместе с тем считаем, что недостаточным является количество исследований, посвященных моделированию процессов, связанных со случайными событиями и случайными величинами, их экспериментальной обработке. Стоит заметить, что и не во всякой среде динамической математики предлагается возможность таких действий. Считаем нужным отметить интерактивную геометрическую систему *Математический конструктор 6.0* [9], где можно описать серию испытаний и визуализировать их проведение, а также программу *GeoGebra* [10; 11], разработчиками которой предусмотрена возможность проведения виртуального эксперимента со случайными величинами и его обработка.

Цель исследования: продемонстрировать возможность визуализации результатов случайных испытаний с использованием инструментов программы *GeoGebra 5.0* и предложить ряд задач с указаниями к решению, на базе которых можно реализовать идею визуализации результатов случайных испытаний.

Обсуждение

Для организации вероятностных и статистических вычислений в программе *GeoGebra 5.0* предусмотрено окно со специальным набором инструментов, который можно найти во вкладке *Таблицы* и графики на боковой панели *Перспективы* или выбрать *Таблицу* из меню *Вид*. Таблица подобна электронным таблицам *Excel*. Имена ячеек можно использовать в выражениях и командах. В ячейки можно вводить не только числа, но и другие типы математических объектов, которые поддерживаются в прпограмме *GeoGebra* (например, координаты точек, функции, команды). Есть возможность сразу выводить на экран графический аналог объекта. Заметим, что инструментарий полотна *Таблица* и команды системы *GeoGebra* выходят далеко за пределы школьного курса математики и могут быть использованы во время изучения университетских курсов теории вероятностей и математической статистики (так, инструмент *Калькулятор Вероятностей* позволяет моделировать различные виды распределений, например, биномиальное, Пуасона, нормальное, χ-квадрат) для статистического сопровождения педагогических экспериментов.

Также в *GeoGebra* предусмотрена работа с бегунком как переменным параметром, на который можно наложить определенные условия и выбор значений которого может быть «автоматически» случайным. Именно это стоит в основе идеи визуализации экспериментальных испытаний на базе случайных событий, что ярко демонстрируется на задачах, где используется геометрическое и статистическое определение вероятности. Это одновременно упрощает построение математической модели задачи, обеспечивает достаточное количество случайных испытаний, визуализирует случайные события и придает учебному процессу исследовательский характер.

Пример 1 (задача о встрече). Юноша и девушка договорились о свидании с 15.00 до 16.00. Известно, что каждый из них приходит в любой момент с 15.00 до 16.00 независимо от другого. Если юноша придет и не встретит девушку, то он будет ждать ее еще в течение 20 мин. Девушка в аналогичной ситуации будет ждать юношу течение 10 мин. Какова вероятность того, что свидание состоится?

Это классическая задача на применение геометрического толкования вероятности, аналитическое решение которой можно найти в [12, с. 149]. Мы приведем решение задачи с использованием статистического определения вероятности на основе серии случайных испытаний.

Пусть a и b – время (в минутах) прихода на свидание юноши и девушки соответственно, считаемые от 15.00. Зададим соответствующие параметры a и b, используя инструмент *Ползунок*. По условию $a \in [0; 60]$, $b \in [0; 60]$ (при их задании поставим отметку *Случайное число*). В квадрате, построенном на осях с вершиной в начале координат и длиной стороны 60, координаты точки $(a;b)$ могут характеризовать время прихода юноши и девушки соответственно.

Согласно тексту задачи свидание произойдет, если выполняются аналитические условия $(a < b \leq a + 20) \vee (b \leq a \leq b + 10)$. Построим точку с координатами $(a;b)$. В свойствах точки во вкладке *Дополнительно* отметим *Условия отображения объекта* $(a < b \leq a + 20) \vee (b \leq a \leq b + 10)$, то есть условие, при котором произойдет свидание (рис. 1).

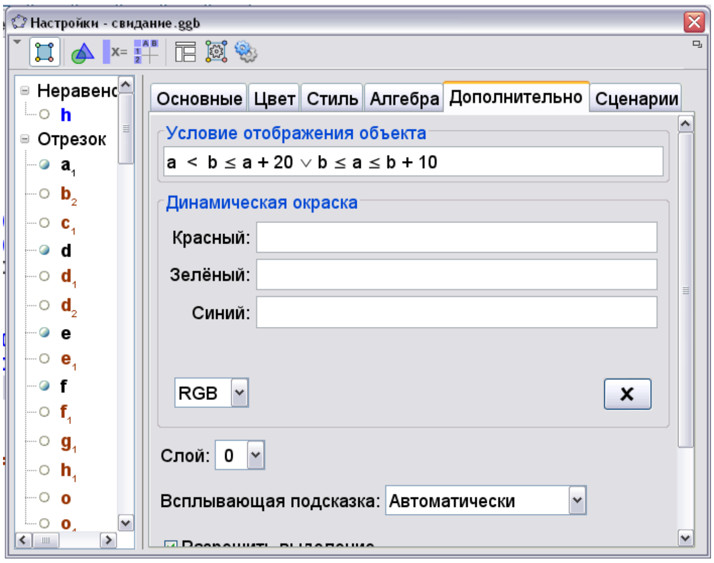


Рис. 1. Установление условий отображения точки с координатами (*a; b*)

Укажем в свойствах точки *Оставлять след* и анимируем параметры *a* и *b*. Получим результат, который наглядно показывает, где должна находиться точка (*a*; *b*) для того, чтобы встреча состоялась (рис. 2).

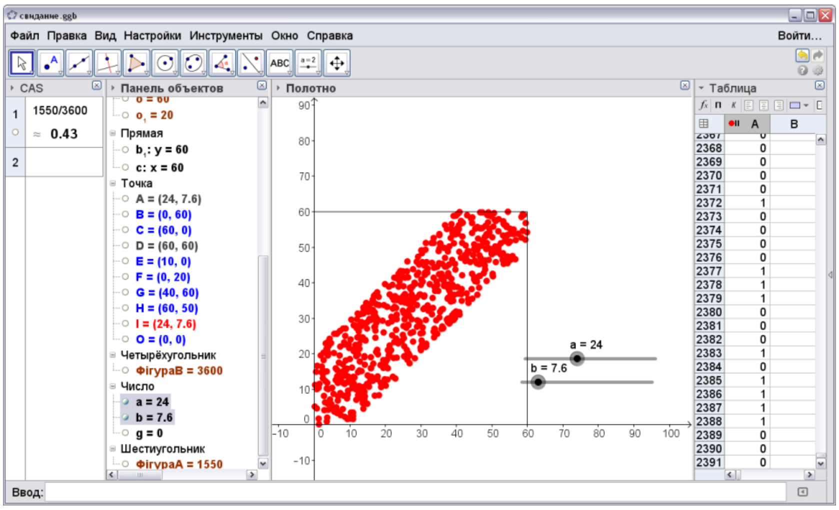


Рис. 2. След точки с координатами (*a*; *b*) при условии, что встреча состоялась

Через командную строку зададим логическую функцию, которая равна 1, если выполняются условия для свидания, и равна 0, если свидание не произойдет – *Если* [$a < b \leq a + 20 \vee b \leq a \leq b + 10, 1, 0$]. Далее в свойствах данной функции выберем услугу *Запись в таблицу* для записи экспериментальных данных в электронную таблицу. При анимации параметров *a* и *b* значение этой функции будут заноситься в первый столбец таблицы.

Затем выделим все полученные значения и вычислим относительную частоту того, что встреча состоится, то есть относительную частоту значений 1 для заданной функции. Для этого воспользуемся инструментом *Среднее арифметическое* на панели окна *Таблица*.

Если провести 408 экспериментов, то получим относительную частоту значений или вероятность встречи 0,4606; при количестве экспериментов 594 – 0,4476; при 806 – 0,4353; при 1041 – 0,4306. Как видим, при увеличении количества испытаний вероятность встречи стремится к 0,4306.

После получения результатов компьютерного эксперимента решим задачу классическим способом, используя геометрическое определение вероятности.

Построим фигуру *A*, точки которой удовлетворяют неравенству $x < y \leq x + 20 \vee y \leq x \leq y + 10 \vee 0 \leq x \leq 60 \vee 0 \leq y \leq 60$. Построим также квадрат *B* со сторонами на осях координат, вершиной в начале координат и длиной стороны 60. Юноша и девушка встретятся тогда и только тогда, когда наугад выбранная в квадрате точка будет принадлежать фигуре А.

Вычислим площади фигур *A* и *B*: площадь фигуры *A* – 1550, площадь фигуры *B* – 3600. Используя геометрическое определение вероятности, с помощью полотна *CAS* получим $\frac{1550}{3600} \approx 0{,}4306$ (рис. 3). Этот результат совпадает с результатом, полученным благодаря случайному выбору точек в квадрате и определению относительной частоты появления встречи.

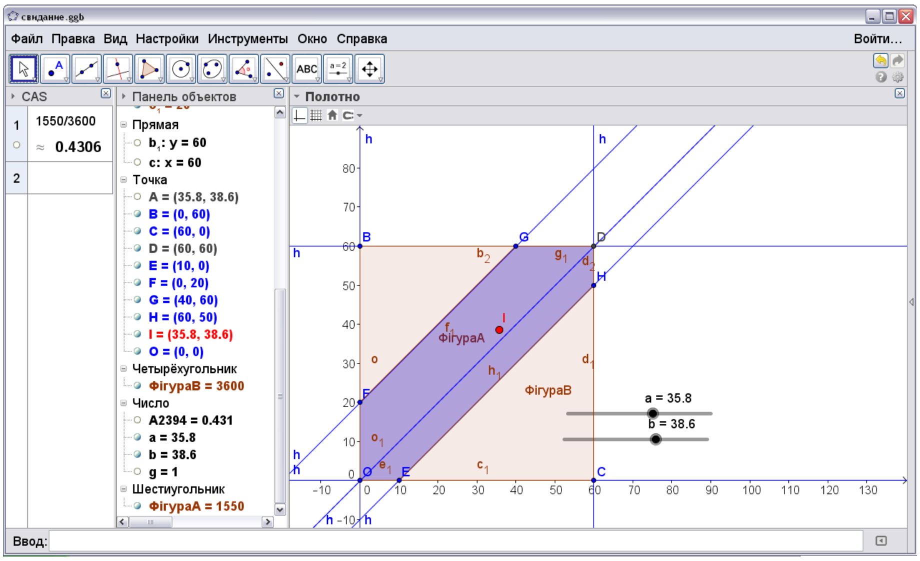


Рис. 3. Решение задачи о встрече, используя геометрическое определение вероятности

Следующие задачи можно предлагать для закрепления идеи визуализации экспериментальных испытаний в среде *GeoGebra*. Мы приведем лишь их условия и указания для самостоятельного решения.

Пример 2. На отрезке [-*2, 2*] наугад выбирают число *x*. Какова вероятность того, что |x| < 1? [12, с. 150].

Указание. Пусть a – параметр точки на отрезке, $a \in [-2; 2]$. Событие состоится при условии, что $|a| < 1$. Построим точку с координатами (a, 0) и зададим логическую функцию - *Если* $[-1 < a < 1, 1{,}0]$ (рис. 4).

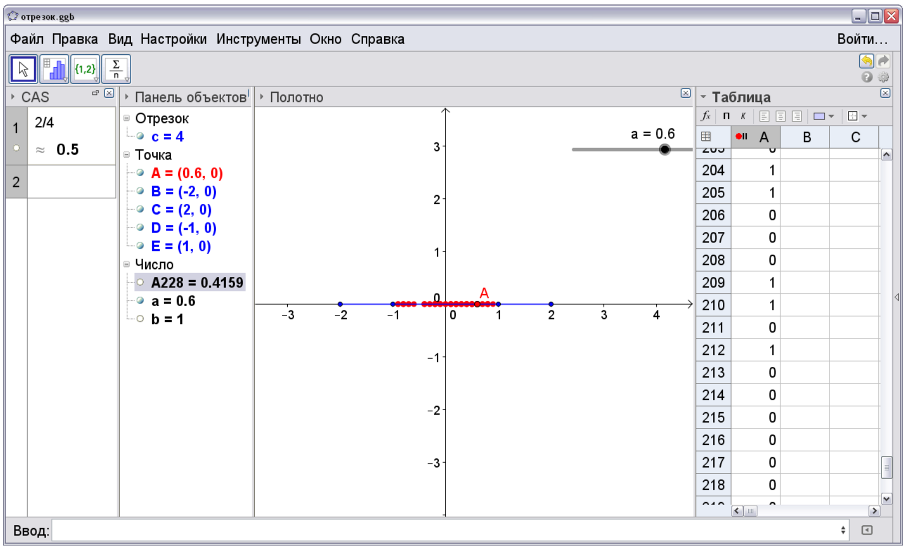


Рис. 4. След точки с координатами $(a, 0)$ при условии, что $(-1 < a < 1)$

Пример 3. В прямоугольнике со сторонами 5 и 7 наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что расстояние от выбранной точки до каждой из сторон прямоугольника окажется меньше 4? [12 с.150]

Указание. Построим произвольную точку $(a;\ b)$, что лежит в прямоугольнике, то есть $a \in [0;7]$, $b \in [0;5]$. Расстояние от выбранной точки до всех сторон прямоугольника будет меньше 4 при условии $(7 - a < 4) \wedge (a < 4) \wedge (5 - b < 4) \wedge (b < 4)$. Итак, задаем логическую функцию – *Если* $[(7 - a < 4) \wedge (a < 4) \wedge (5 - b < 4) \wedge (b < 4)$, 1,0] (рис. 5).

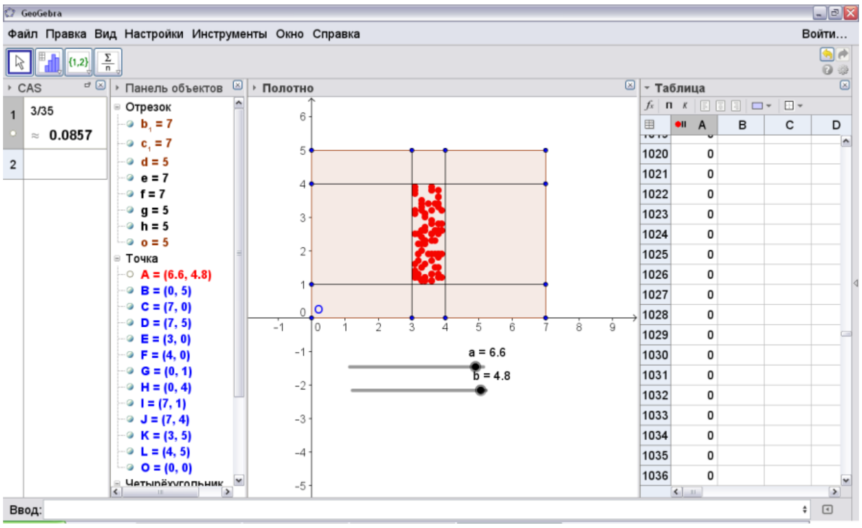


Рис. 5. След точки с координатами $(a;\ b)$ при условии, что расстояние от нее к каждой из сторон прямоугольника меньше 4

Пример 4. В шар радиуса 2 вписали куб. Какова вероятность того, что точка, наугад выбранная в шаре, попадет в куб? [12 с.151].

Указание. Построим шар радиуса 2 с центром в начале координат. Для того, чтобы точка всегда была внутри шара, предлагаем воспользоваться сферическими координатами - нужно, чтобы сферические координаты $(r,\ \theta,\ \varphi)$ точки удовлетворяли условию $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 180^0$, $0 \le \varphi \le 360^0$. Именно эти пределы будем отождествлять с границами параметров $r,\ \theta,\ \varphi$. В программе *GeoGebra* можно построить точку только по декартовыми координатами через командную строку. Поэтому нужно задать точку с координатами (a, b, c), где $a = r\,sin\theta\,cos\varphi$, $b = r\,sin\theta\,sin\varphi$, $c = r\,cos\theta$.

Следующим шагом впишем в шар куб. Ребро куба будет равно $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Куб можно построить по двум его вершинам, например, по точкам $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Точка, наугад выбранная в шаре, попадет во вписанный куб при условии, что $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \wedge \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < b < \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \wedge \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < c < \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Итак, нужно задать логическую функцию - *Если* $\left[\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \wedge \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < b < \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \wedge \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} < c < \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), 1{,}0\right]$ (рис. 6).

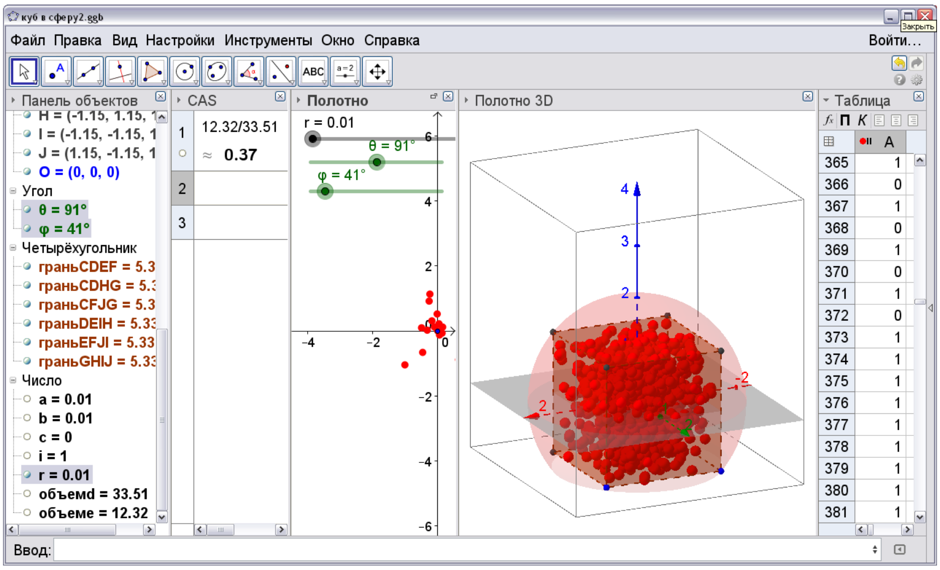


Рис. 6. След точки с координатами (a; b; c) при условии, что она попадет во вписанный в шар куб

Заключение

Такая визуализация случайных событий при решении задач теории вероятности позволяет решить одновременно несколько учебных задач.

1. Продемонстрировать пути использования информационных технологий и специализированного программного обеспечения для решения вероятностных задач.

2. Обеспечить эмпирическую базу учебного процесса, которая позволит говорить об осознании субъектом обучения проблемы, которая сформулирована условием задачи, и адекватность моделирования этого условия и поиска ее решений.

3. Продемонстрировать различные подходы к получению численного решения вероятностных задач и его «одинаковость» при использовании этих способов.

4. Сформулировать дополнительные задачи, среди которых – обоснование «обязательного» приближения полученных результатов к точному решению с увеличением количества случайных событий, которое невозможно без понимания сути вероятностных событий, и которые отождествляются с дискретными или непрерывными законами распределений.

5. Усилить прикладную направленность математики и сформировать ассоциативные связи между формальной математикой и жизненными задачами (проблемами) через визуализацию эксперимента со случайными величинами. Иными словами, можно продемонстрировать использование математических методов и целесообразность построений математических моделей различных ситуаций в реальной жизни. Заметим, что традиционными методами или через собственное воображение моделирования таких задач (на основе случайных событий) трудно представить и воспроизвести.

6. Использование программ динамической математики (*GeoGebra*, *Математический конструктор, Gran1* т.п.) формирует основу для упрощения построения математической модели задачи, организации достаточного количества случайных испытаний, визуализации этих случайных событий и позволяет придать процессу обучения исследовательский характер.

7. Вместе с тем считаем нужным отметить, что динамическая визуализация не всегда имеет дидактические преимущества перед статическим представлением учебного материала. Вопрос о целесообразности динамической визуализации той или иной модели является контекстно зависимым, и в случае использования идеи наглядности эксперимента со случайными величинами на выбор форм и средств динамизации, характер и степень интерактивности обязательно повлияет опыт учителя, уровень его владения компьютерными средствами математического направления, ощущение учебной аудитории и тому подобное.

Примечания:

1. Самсонова С.А. Методическая система использования информационных технологий при обучении стохастике студентов университетов / дис. … докт. пед. наук 13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (математика). Коряжма, 2004. 310 с.
2. Элементы теории вероятностей с EXEL: Практикум / [Данилин Г.А., Курзина В.М., Курзин П.А., Полещук О.М.] М.: МГУЛ, 2004. 87 с.
3. Воскобойников Ю.Е. Математическая статистика (с примерами в EXEL) / Ю.Е. Воскобойников, Е.И. Тимошенко. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. 152 с.
4. Булычев В.А. Компьютер в школьном курсе вероятности и статистики / В. А. Булычев // Математика. 2009. №14. Режим доступу: http://mat.1september.ru/view_article.php?ID=200901409.
5. Бычкова Д.Д. Формирование предметных компетенций в процессе решения вероятностных задач с помощью компьютера / Д.Д. Бычкова // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. Серия. Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. 2011. Т.17, №3. С. 29-32.
6. Михалін Г.О. Про кількість нерухомих точок перестановок, число е та індивідуальний підхід у навчанні елементів стохастики майбутніх учителів математики / Г.О. Михалін, С.Л. Надточій, А.О. Костюченко // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. 2009. № 14. С. 120-129.
7. Жалдак М.І. Елементи стохастики з комп’ютерною підтримкою. Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Г.Ю. Михалін. К.: РННУ "ДІНІТ", 2004. 125 с.
8. Горошко Ю.В. Розв’язування задач з математичної статистики з використанням програми Gran1 / Ю.В. Горошко // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання. Збірник 7. Режим доступу: http://www.ii.npu.edu.ua/2009-11-27-11-40-37/75-7.
9. Булычев В. А. Случайный эксперимент и его реализация в среде «1С: Математический конструктор 6.0» / В.А. Булычев // Информатика и образование. 2014. № 3. С. 45-47.
10. Хохенватор М. Введение в GeoGebra / Хохенватор М. / Перевод Т. С. Рябова. 2012. 153 с.
11. Крамаренко Т. Використання GeoGebra у навчанні теорії ймовірностей і математичної статистики / Т. Крамаренко, О. Ухова // Восьма міжнародна конференція «Нові інформаційні технології в освіті для всіх: безперервна освіта» (ITEA-2013). 26-27 листопада 2013. Київ. 2013. С. 77-84.
12. Алгебра: Підручник для 11 класу з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. [Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М. С.] Х.: Гімназія, 2011. Ч.2. 272 с.

References:

1. Samsonova S.A. Metodicheskaya sistema ispol'zovaniya informatsionnykh tekhnologii pri obuchenii stokhastike studentov universitetov / dis. … dokt. ped. nauk 13.00.02 – teoriya i metodika obucheniya i vospitaniya (matematika). Koryazhma, 2004. 310 s.
2. Elementy teorii veroyatnostei s EXEL: Praktikum / [Danilin G.A., Kurzina V.M., Kurzin P.A., Poleshchuk O.M.] M.: MGUL, 2004. 87 s.
3. Voskoboinikov Yu.E. Matematicheskaya statistika (s primerami v EXEL) / Yu.E. Voskoboinikov, E.I. Timoshenko. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin), 2006. 152 s.
4. Bulychev V.A. Komp'yuter v shkol'nom kurse veroyatnosti i statistiki / V. A. Bulychev // Matematika. 2009. №14. Rezhim dostupu: http://mat.1september.ru/view_article. php?ID =200901409.
5. Bychkova D.D. Formirovanie predmetnykh kompetentsii v protsesse resheniya veroyatnostnykh zadach s pomoshch'yu komp'yutera / D.D. Bychkova // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo

universiteta im. N.A. Nekrasova. Seriya. Pedagogika. Psikhologiya. Sotsial'naya rabota. Yuvenologiya. Sotsiokinetika. 2011. T.17, №3. S. 29-32.

6. Mikhalin G.O. Pro kil'kist' nerukhomikh tochok perestanovok, chislo e ta individual'nii pidkhid u navchanni elementiv stokhastiki maibutnikh uchiteliv matematiki / G.O. Mikhalin, S.L. Nadtochii, A.O. Kostyuchenko // Naukovii chasopis NPU im. M. P. Dragomanova. Seriya 2. Komp'yuterno-oriєntovani sistemi navchannya. 2009. № 14. S. 120-129.

7. Zhaldak M.I. Elementi stokhastiki z komp'yuternoyu pidtrimkoyu. Posibnik dlya vchiteliv / M.I. Zhaldak, G.Yu. Mikhalin. K.: RNNU "DINIT", 2004. 125 s.

8. Goroshko Yu. V. Rozv'yazuvannya zadach z matematichnoï statistiki z vikoristannyam programi Granı / Yu. V. Goroshko // Komp'yuterno-oriєntovani sistemi navchannya. Zbirnik 7. Rezhim dostupu: http://www.ii.npu.edu.ua/2009-11-27-11-40-37/75--7.

9. Bulychev V. A. Sluchainyi eksperiment i ego realizatsiya v srede «1S: Matematicheskii konstruktor 6.0» / V. A. Bulychev // Informatika i obrazovanie. 2014. № 3. S. 45-47.

10. Khokhenvator M. Vvedenie v GeoGebra / Khokhenvator M. / Perevod T. S. Ryabova. 2012. 153 s.

11. Kramarenko T. Vikoristannya GeoGebra u navchanni teoriї imovirnostei i matematichnoї statistiki / T. Kramarenko, O. Ukhova // Vos'ma mizhnarodna konferentsiya «Novi informatsiini tekhnologiї v osviti dlya vsikh: bezperervna osvita» (ITEA-2013). 26-27 listopada 2013. Kiїv. 2013. S. 77-84.

12. Algebra: Pidruchnik dlya 11 klasu z pogliblenim vivchennyam matematiki: u 2 ch. [Merzlyak A.G., Nomirovs'kii D.A., Polons'kii V.B., Yakir M. S.] Kh.: Gimnaziya, 2011. Ch.2. 272 s.

УДК 378.14:371.214.46:[004.78:51]

Организация экспериментальных вычислений в Geogebra 5.0 при решении задач теории вероятностей

[1] Елена Семенихина
[2] Марина Друшляк

[1] Сумской государственный педагогический университет имени А.С. Макаренко, Украина
Кандидат педагогических наук, доцент
E-mail: e.semenikhina@fizmatsspu.sumy.ua
[2] Сумской государственный педагогический университет имени А. С. Макаренко, Украина
Кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: marydru@mail.ru

Аннотация. В статье описаны возможности использования компьютерной программы GeoGebra 5.0 при изучении теории вероятности. Рассмотрена идея динамической визуализации результатов случайных испытаний на примере классической задачи о встрече, для которой предложено два пути решения: с использованием статистического определения вероятности на основе серии случайных испытаний и традиционный с использованием геометрического определения вероятности. Предложен ряд задач с указаниями к решению, на базе которых можно реализовать идею визуализации результатов случайных испытаний.

Ключевые слова: GeoGebra 5.0; визуализация; визуализация случайных величин; визуализация результатов случайных испытаний; статистическое и геометрическое определение вероятности.